Title	Multiplicativity of the L-factors (Automorphic forms and automorphic L-functions)
Author(s)	山名, 俊介
Citation	数理解析研究所講究録 (2013), 1826: 214-229
Issue Date	2013-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/194750
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1826 巻 2013 年 214-229

Multiplicativity of the L-factors

九州大学大学院数理学研究院　山名俊介 (Shunsuke Yamana)
講演時: Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka City University
本稿執筆時: Graduate School of Mathematics, Kyushu University

序

本稿では, 以下の相互に関連する二つの問題を考える. 一つは古典群の既約許容表現の L 因子を定義することであり, もう一つはテータリフトが消えないための必要十分条件を与えることである. L 函数の解析的研究には, L 因子を doubling 法により解析的に構成する方法が有用である. この構成が正しい L 因子を与えることを確認することが本題である. 局所理論では, doubling 法の L 因子が multiplicativity を満たすことを示す. ここまでの議論は全ての古典群に適用出来るが, 簡単のために直交群の場合だけを考える. 大域理論では, 直交群の尖点的表現のテータリフトの非消滅を完全 L 函数の解析的性質により判定出来ることを示す.

1　局所理論

1.1　局所ゼータ積分

F を標数が 0 の局所体, $(V,(\ ,\ ))$ を二次形式付きの F 上 n 次元ベクトル空間とし,

$$V^{\square}=V\oplus V,\qquad V_1=V\oplus\{0\},\qquad V_2=\{0\}\oplus V$$

とおく. 二次形式 $(\ ,\ )^{\square}:V^{\square}\times V^{\square}\to F$ を次のように定義する:

$$(x+y,x'+y')^{\square}=(x,x')-(y,y')\qquad (x,x'\in V_1,\ y,y'\in V_2).$$

$G=O(V)$ と $G^{\square}=O(V^{\square})$ をそれぞれ V と $V^{\square}$ の直交群とする. 自然な埋め込み $G\times G\hookrightarrow G^{\square}$ を i で表す.

$(V^{\square},(\ ,\ )^{\square})$ は常に分裂する. すなわち

$$V^{\triangle}=\{(x,x)\in V^{\square}\mid x\in V\},\qquad V^{\nabla}=\{(x,-x)\in V^{\square}\mid x\in V\}$$

とおけば, $V^{\square}=V^{\nabla}+V^{\triangle}$ は V の polarization である. $G^{\square}$ の極大放物型部分群を $P(V^{\triangle})=\{g\in G^{\square}\mid V^{\triangle}g=V^{\triangle}\}$ により定義し, 複素数 s に対して $I(s)=\mathrm{Ind}_{P(V^{\triangle})}^{G^{\square}}|\det|^s$ は $P(V^{\triangle})$ の一次元表現 $p\mapsto|\det(p|_{V^{\triangle}})|^{-s}$ の $G^{\square}$ への正規化された誘導表現を表す. $G^{\square}$ の極大コンパクト部分群 $K^{\square}$ を固定する. 岩澤

分解 $G^{\square} = P(V^{\triangle})K^{\square}$ が成り立つとする. 右 $K^{\square}$-有限な函数 $f^{(s)} : G^{\square} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は s に関して正則かつ各 s に対して $f^{(s)} \in I(s)$ であるとき, $I(s)$ の正則切断と呼ばれる. π を G の許容表現とする. $\pi^{\vee}$ で π の反傾表現を表す (π が既約ならば, $\pi \simeq \pi^{\vee}$ であることが知られている). $\xi \in \pi$, $\xi^{\vee} \in \pi^{\vee}$ と正則切断 $f^{(s)}$ に対して, 局所ゼータ積分は

$$Z(\xi \boxtimes \xi^{\vee}, f^{(s)}) = \int_G \langle \pi(g)\xi, \xi^{\vee} \rangle f^{(s)}(i(g,e))dg$$

により与えられる. この積分は実部 $\Re s$ が十分大きいときに絶対収束する.

V の特殊直交群の L 群は, n が奇数のとき, $Sp(n-1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, n が偶数のとき, $SO(n,\mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ である. n が偶数かつ V の判別式体 E が F と異なるとき, $\epsilon = \mathrm{diag}[1,1,\ldots,1,-1] \in O(n,\mathbb{C}) \setminus SO(n,\mathbb{C})$ とすれば, ガロア群の作用は $\mathrm{Gal}(E/F)$ を経由して, $g \mapsto \epsilon g \epsilon^{-1}$ により与えられる. それ以外の場合の作用は自明である. n が奇数のとき, $N = n-1$, n が偶数のとき, $N = n$ として, $\mathrm{std} : {}^L G \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ を標準的な準同型として, 標準 L 函数を考える.

注意 1.1. 非連結群 G の L 群は定義されていないことに注意する. Adams [1] によると, G の L 群は n が奇数のとき, $Sp(n-1,\mathbb{C}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, n が偶数のとき, $O(n,\mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ とするのが良いそうである.

修正因子 $b(s)$ を

$$b(s) = \prod_{j=1}^{[n/2]} \zeta(2s+n+1-2j)$$

により定義すれば, π が不分岐のとき不分岐データ ξ_0, $\xi_0^{\vee}$, $f_0^{(s)}$ の積分は

$$Z(\xi_0 \boxtimes \xi_0^{\vee}, f_0^{(s)}) = L\left(s+\tfrac{1}{2}, \pi, \mathrm{std}\right) \langle \xi_0, \xi_0^{\vee} \rangle b(s)^{-1}, \tag{1.1}$$

により与えられる.

1.2 L 因子, ε 因子, γ 因子

ψ を F の非自明な指標とする. N を $P(V^{\triangle})$ のべき単根基とし, 絡作用素 $M(s) : I(s) \to I(-s)$ を積分

$$M(s)f^{(s)}(g) = \int_N f^{(s)}(wug)du, \qquad w = (1,-1) \in G \times G \subset G^{\square}$$

により定義する. Piatetski-Shapiro, Rallis と Lapid [14, 15, 12] はゼータ積分 $Z(\xi \boxtimes \xi^{\vee}, f^{(s)})$ の有理型解析接続と函数等式を証明した. Lapid と Rallis は $M(s)$ の正規化 $M_{\psi}^{\dagger}(s)$ を定義し, γ 因子を函数等式の比例因子として定義した. すなわち,

$$Z(\xi \boxtimes \xi^{\vee}, M_{\psi}^{\dagger}(s)f^{(s)}) = \epsilon_{\pi,V,\psi}\gamma\left(s+\tfrac{1}{2}, \pi, \psi\right) Z(\xi \boxtimes \xi^{\vee}, f^{(s)}).$$

n が奇数のとき, $\epsilon_{\pi,V,\psi}$ は V の正規化された Hasse 不変量であり, n が偶数のとき, χ_V を判別式から定まる $F^{\times}$ の二次指標として, $\epsilon_{\pi,V,\psi} = \pi(-1)\varepsilon(1/2, \chi_V, \psi)$ である. $\gamma(s,\pi,\psi)$ は “Ten commandments” と呼ばれる十個の性質を満たし, それらの性質により一意的に決定される. しばしば ψ を省略し, $M^{\dagger}(s)$ と書く. L 因子と ε 因子を定義するために, 良い切断を以下のように定義する.

定義 1.2 (良い切断). $I(s)$ の切断 $f^{(s)}$ は正則切断 $f_1^{(s)}$ と $f_2^{(s)}$ が存在して, $f^{(s)} = f_1^{(s)} + M^\dagger(-s)f_2^{(-s)}$ と書けるとき, 良い切断と呼ばれる.

注意 1.3. この定義の理由は上に述べた函数等式より明らかである. 正則切断は当然良い切断であり, 函数等式の両辺の対称性より $M^\dagger(-s)f_2^{(-s)}$ も良い切断でなければならない. $M^\dagger(-s) \circ M^\dagger(s) = Id$ であるから, 正則切断を含み, $M^\dagger(s)$ で保たれる最小の切断の族が良い切断の族である.

以下の良い切断の特徴付けは重要である:

命題 1.4 ([4, 20]). 以下の条件は同値.

- $f^{(s)}$ は良い切断.
- $f^{(s)}$ は $\Re s \geq 0$ で正則かつ $M^\dagger(s)f^{(s)}$ は $\Re s < 0$ で正則.

Tate の L 因子の積を局所 Euler 因子と呼ぶことにする.

命題 1.5 ([14, 20]). *π が既約であるとき, 局所 Euler因子 $L(s,\pi)$ と単函数 $\varepsilon(s,\pi,\psi)$ が存在して, 以下の性質を満たす.*

- 任意の $\xi \in \pi$, $\xi^\vee \in \pi^\vee$ と良い切断 $f^{(s)}$ に対して, $Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)})/L\left(s+\frac{1}{2},\pi\right)$ は整函数.
- 任意の $s' \in \mathbb{C}$ に対して, ある $\xi \in \pi$, $\xi^\vee \in \pi^\vee$ と良い切断 $f^{(s)}$ が存在して, 極限値 $\lim_{s\to s'} Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)})/L\left(s+\frac{1}{2},\pi\right)$ が 0 でない.
- 任意の $\xi \in \pi$, $\xi^\vee \in \pi^\vee$, $f^{(s)}$ に対して次の函数等式が成り立つ:

$$\frac{Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, M^\dagger(s)f^{(s)})}{L\left(\frac{1}{2}-s,\pi\right)} = \epsilon_{\pi,V,\psi}\varepsilon\left(s+\frac{1}{2},\pi,\psi\right)\frac{Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)})}{L\left(s+\frac{1}{2},\pi\right)}. \tag{1.2}$$

注意 1.6. (1) ε 因子の単項性は最初の二性質から直ちに従う. 最後の性質は γ 因子を含む函数等式の言い換えであり, 次の関係式は基本的である:

$$\gamma(s,\pi,\psi) = \epsilon(s,\pi,\psi)L(1-s,\pi^\vee)/L(s,\pi). \tag{1.3}$$

(2) 同様の構成が $(\ ,\ ) = 0$, $G = GL(V)$ の場合にも適用できるが, 得られる局所因子は Godement-Jacquet の局所因子と異なる (命題 1.13 参照). 上の構成を直交群の Levi 部分群に次節で適用する.

(3) 定義より局所ゼータ積分の族と L 因子の解析的性質は一致する. 従って, 保型 L 函数の解析的性質の解析がゼータ積分の解析に帰着される.

(4) $\phi \in C_c^\infty(G)$ に対して, 二条件 $\mathrm{supp}(f_\phi^{(s)}) \subset P\cdot(G\times e)$ と $f_\phi^{(s)}|_{G\times e} = \phi$ により $I(s)$ の正則切断 $f_\phi^{(s)}$ が定まる (F がアルキメデス体なら, $K^\square$-有限とは限らない切断も考える必要がある). $\xi, \xi^\vee, \phi$ を適当に選べば, $Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f_\phi^{(s)}) = 1$ と出来るので, $L(s,\pi)$ は零点を持たない, 従って局所 Euler 因子である.

(5) 正規化されたゼータ積分を

$$Z^\dagger(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)}) = Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)})/L\left(s + \tfrac{1}{2}, \pi\right)$$

により定義する. $\Re s' \geq 0$ のとき, $Z^\dagger(s', \pi) \in \mathrm{Hom}_{G\times G}(I(s'), \pi^\vee \boxtimes \pi)$ を

$$[Z^\dagger(s', \pi) f^{(s')}](\xi \boxtimes \xi^\vee) = \lim_{s \to s'} Z^\dagger(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)})$$

により定義できる. この不変ペアリングは 0 でなく, 局所テータ対応と密接な関係がある.

1.3 Multiplicativity

G の放物型部分群 Q の Levi 部分群はいくつかの一般線形群 $\mathrm{GL}(n_j)$ $(1 \leq j \leq k)$ と $n - 2\sum_{j=1}^k n_j$ 次の直交群の直積である. この直積群の許容表現

$$\sigma = \sigma_1 \boxtimes \sigma_2 \boxtimes \cdots \boxtimes \sigma_k \boxtimes \sigma_0$$

に対し, $\mathrm{Ind}_Q^G \sigma$ を正規化された誘導表現とする. σ の局所因子を形式的に以下のように定義する.

$$L(s, \sigma) = \prod_{j=0}^k L(s, \sigma_j), \quad \varepsilon(s, \sigma, \psi) = \prod_{j=0}^k \varepsilon(s, \sigma_j, \psi), \quad \gamma(s, \pi, \psi) = \prod_{j=0}^k \gamma(s, \sigma_j, \psi).$$

$j = 1, 2, \ldots, k$ に対して, $e(\sigma_j)$ を σ_j の捻り $\sigma_i \otimes |\det|^{-e(\sigma_i)}$ の中心指標がユニタリ指標になる唯一の実数とする. Q が G の標準的放物型部分群, σ_0 が緩増加表現, $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ が本質的緩増加表現であり, $e(\sigma_1) > \cdots > e(\sigma_k) > 0$ であるとき, $\mathrm{Ind}_Q^G \sigma$ は標準加群と呼ばれ, 唯一つの既約商を持つ. この既約商を Langlands 商と呼ぶ. G の任意の既約許容表現 π に対して, 標準加群 $\mathrm{Ind}_Q^G \sigma$ が存在して, π は $\mathrm{Ind}_Q^G \sigma$ の Langlands 商と同型であり, Q と σ は本質的に π から一意的に定まる. このような既約許容表現の分類は Langlands 分類の直交群への拡張である.

定理 1.7. *π が標準加群 $\mathrm{Ind}_Q^G \sigma$ の Langlands 商であるとき,*

$$L(s, \pi) = L(s, \sigma), \qquad \varepsilon(s, \pi, \psi) = \varepsilon(s, \sigma, \psi), \qquad \gamma(s, \pi, \psi) = \gamma(s, \sigma, \psi).$$

誘導表現の既約部分商は同じ γ 因子を共有するので, γ 因子に関しては強い意味での multiplicativity が成立する ([12] 参照). 従って, L 因子の multiplicativity を証明すれば, ϵ 因子のそれは (1.3) から直ちに従う. 定理の証明は三段階からなる. 以下では F が非アルキメデス的であるときに, 各段階をスケッチする.

1.4 放物型誘導表現の L 因子

命題 1.8. *$P = MN$ を G の放物型部分群とし, M の許容表現 σ が命題 1.5 の条件を全て満たすとき, $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ も命題 1.5 の条件を全て満たし, $L(s, \mathrm{Ind}_P^G \sigma) = L(s, \sigma)$.*

注意 1.9. (1) 命題 1.8 は命題 1.5 の証明を超尖点的表現の場合に帰着する.

(2) 帰納法の要求から, 既約でない表現の L 因子も考える必要がある.

Proof. $\mathrm{Ind}_P^G\sigma$ の行列係数は,

$$\int_{P\backslash G}\langle\xi(xg),\xi^\vee(x)\rangle dx \qquad (\xi\in\mathrm{Ind}_P^G\sigma,\ \xi^\vee\in\mathrm{Ind}_P^G\sigma^\vee)$$

により与えられる. これを代入して計算すると, $\mathrm{Ind}_P^G\sigma$ のゼータ積分は

$$Z(\xi\boxtimes\xi^\vee,f^{(s)})=\int_{P\times P\backslash G\times G}Z(\xi(g)\boxtimes\xi^\vee(g'),\Psi_{g,g'}(s)f^{(s)})dgdg'$$

のように σ のゼータ積分を使って表されることが分かる. ここで,

$$\Psi_{g,g'}(s)f^{(s)}(m)=\int_N\delta_P(m)^{-1/2}f^{(s)}((umg,g'))du$$

は $M^\square$ の退化主系列表現 $I_{M^\square}(s)$ の切断である.

次の補題の (1) より $L(s,\mathrm{Ind}_P^G\sigma)/L(s,\sigma)$ は整函数である. 積分 $\int_{P\times P\backslash G\times G}$ は ξ と $\xi^\vee$ を上手く選ぶことでコントロール出来るので, (2) より $L(s,\mathrm{Ind}_P^G\sigma)/L(s,\sigma)$ は零点を持たない, 従って 1 でなければならない. □

補題 1.10. *(1) $f^{(s)}$ が良い切断であれば, $\Psi_{g,g'}(s)f^{(s)}$ も良い切断.*

(2) $I_{M^\square}(s)$ の任意の良い切断 $h^{(s)}$ に対して, 良い切断 $f^{(s)}$ が存在して,

$$\Psi_{e,e}(s)f^{(s)}=h^{(s)}.$$

Proof. $\Psi_{g,g'}(s)$ は $\Re s>-\frac{1}{2}$ で絶対収束するので, $\Psi_{g,g'}(s)f^{(s)}$ は $\Re s\geq 0$ で良い切断, つまり正則切断である. $I_{M^\square}(s)$ の正規化された絡作用素を $M^\dagger_{M^\square}(s)$ と書くとき, Lapid と Rallis [12] が証明した等式

$$\Psi_{g,g'}(-s)\circ M^\dagger(s)=M^\dagger_{M^\square}(s)\circ\Psi_{g,g'}(s)$$

より, $\Psi_{g,g'}(s)f^{(s)}$ は $\Re s<0$ でも良い切断である.

(2) は $I(s)$ の Bruhat フィルトレーションを使って証明できる. □

系 1.11. $P=MN$ を G の放物型部分群とし, σ を M の既約表現, π を $\mathrm{Ind}_P^G\sigma$ の部分商とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $L(s,\pi)/L(s,\sigma)$ は整函数である.

(2) もし任意の実部が非負の複素数 s' に対して, ある $\xi\in\pi$, $\xi^\vee\in\pi^\vee$ と正則切断 $f^{(s)}$ が存在して, $\lim_{s=s'}Z(\xi\boxtimes\xi^\vee,f^{(s)})/L\left(s+\frac{1}{2},\pi\right)\neq 0$ が成り立つならば, $L(s,\pi)=L(s,\sigma)$.

Proof. σ の行列係数は π の行列係数なので, (1) は明らかである. (2) の仮定より (1.2) の右辺は右半平面の任意の点で 0 でない. 命題 1.4 と仮定より左辺は左半平面の任意の点で 0 でない. 従って, (2) が成り立つ. □

$b(s)f_0^{(s)}$ は良い切断なので, 次の系は (1.1) と系 1.11(1) から従う.

系 1.12. π が不分岐既約表現であるとき, $L(s,\pi)=L(s,\pi,\mathrm{std})$.

1.5 Godement-Jacquet の L 因子との比較

一般線形群の既約許容表現 π に対して, $L^{GJ}(s,\pi)$, $\varepsilon^{GJ}(s,\pi,\psi)$, $\gamma^{GJ}(s,\pi,\psi)$ を Godement-Jacquet の局所因子とする.

命題 1.13. π が $\mathrm{GL}(n)$ の既約許容表現であるとき,

$$L(s,\pi)=L^{GJ}(s,\pi)L^{GJ}(s,\pi^\vee).$$

命題 1.13 は任意の既約許容表現に対して成り立つが, 定理 1.7 を証明するためには, 本質的緩増加表現に対して証明すれば十分である. 関係式

$$\gamma(s,\pi,\psi)=\gamma^{GJ}(s,\pi,\psi)\gamma^{GJ}(s,\pi^\vee,\psi)$$

は [12] で証明されている. π が緩増加表現であれば, $L(s,\pi)$ と $L^{GJ}(s,\pi)$ と $L^{GJ}(s,\pi^\vee)$ は $\Re s>0$ で正則であるから, γ 因子の分母と分子は共通因子を持たないので, 命題 1.13 が直ちに分かる. しかしながら, この議論を本質的緩増加表現に拡張するには, 特別な考察が必要である.

$$U=F^n,\qquad U^\square=U\oplus U,\qquad U^\triangle=\{(u,u)\in U\},$$
$$G=\mathrm{GL}(U),\qquad G^\square=\mathrm{GL}(U^\square),\qquad P=\{g\in G^\square\mid U^\triangle g=U^\triangle\}$$

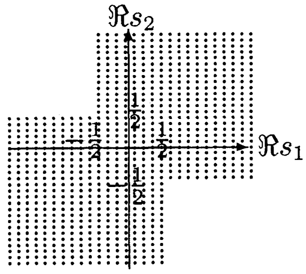
とおく. P の Levi 部分群 M は $\mathrm{GL}(n)\times\mathrm{GL}(n)$ と同型である. $s_1,s_2\in\mathbb{C}$ に対して, $I(s_1,s_2)=\mathrm{Ind}_P^{G^\square}|\det|^{s_1}\boxtimes|\det|^{-s_2}$ とする. 二変数の正則切断や良い切断が同様に定義できる. $\xi\in\pi$, $\xi\in\pi^\vee$, $I(s_1,s_2)$ の切断 $f^{(s_1,s_2)}$ に対して, 二変数のゼータ積分を類似の積分

$$Z(\xi\boxtimes\xi^\vee,f^{(s_1,s_2)})=\int_G\langle\pi(g)\xi,\xi^\vee\rangle f^{(s_1,s_2)}(i(g,e))dg$$

により定義する. $f^{(s_1,s_2)}$ を良い切断とする. π が緩増加表現であれば, 上の積分は $\mathbb{C}^2$ の領域 $\{\Re s_1,\Re s_2>-\frac{1}{2}\}$ で絶対収束する. 函数等式より

$$L^{GJ}(s_1,\pi)^{-1}L^{GJ}(s_2,\pi^\vee)^{-1}Z(\xi\boxtimes\xi^\vee,f^{(s_1,s_2)}) \tag{1.4}$$

は下図の領域で正則であることが分かる:



一方, ある多項式 α_1, α_2 が存在して, $\alpha_1(q^{-s_1})\alpha_2(q^{-s_2})Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s_1,s_2)})$ が $\mathbb{C}^2$ 上正則になることも分かるので, (1.4) は結局 $\mathbb{C}^2$ 上正則である.

本質的緩増加表現 π に対して, $|\det|^s f^{(s_1,s_2)} \in I(s_1+s, s_2-s)$ かつ

$$Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, |\det|^s \cdot f^{(s_1,s_2)}) = Z((|\det|^s \cdot \xi) \boxtimes (|\det|^s \cdot \xi^\vee), f^{(s_1,s_2)})$$

であるから, $L^{GJ}(s,\pi)^{-1}L^{GJ}(s,\pi^\vee)^{-1}L(s,\pi)$ は多項式 $\alpha(q^{-s})$ である.

$$U_1 = U \oplus \{0\}, \qquad U_2 = \{0\} \oplus U, \qquad P^{U_1} = \{g \in G^\square \mid U_1 g = U_1\}$$

とおき, P^{U_2} のべき単根基を N^{U_1} と書く. $\phi \in \mathscr{S}(N^{U_1})$ に対して, 二条件

- $\mathrm{supp}(f_\phi^{(s)}) \subset P \cdot \bar{N}$;
- $f_\phi^{(s)}|_{N^{U_1}} = \phi$

により $I(s)$ の正則切断 $f_\phi^{(s)}$ を定義する $(i = 1, 2)$. 適当な位相同型 $N^{U_1} \simeq \mathrm{M}_n(F)$ を用いれば,

$$Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f_\phi^{(s)}) = Z^{GJ}\big(\xi \boxtimes \xi^\vee, s + \tfrac{1}{2}, \phi\big) \tag{1.5}$$

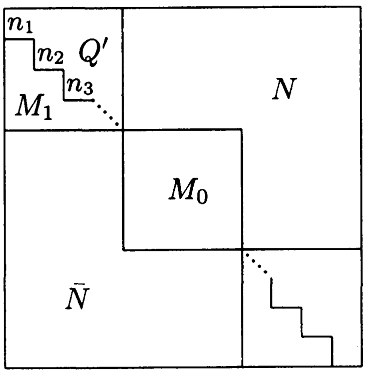
が分かる. 従って, $L^{GJ}(s,\pi)/L(s,\pi)$ は整函数であり, $\alpha(q^{-s})$ は $L^{GJ}(s,\pi^\vee)^{-1}$ の因子である. 同様にして, $\alpha(q^{-s})$ が $L^{GJ}(s,\pi)^{-1}$ の因子であることも分かる. $L(s,\pi)^{-1}$ と $L(1-s,\pi^\vee)^{-1}$ は共通因子を持たないので, $\alpha(q^{-s})$ と $\alpha(q^{s-1})$ は互いに素である. (1.3) に代入すれば,

$$\varepsilon^{GJ}(s,\pi,\psi)\varepsilon^{GJ}(s,\pi^\vee,\psi) = \varepsilon(s,\pi,\psi)\alpha(q^{s-1})/\alpha(q^{-s}).$$

これより, $\alpha = 1$ でなければならない.

1.6 Langlands 分類の L 因子

$G = O(V)$ の部分群 M_1, M_0, Q', N, $\bar{N}$ を以下のように定める.



$\mathrm{Ind}_{Q'}^{M_1}(\sigma_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \sigma_k)$ の Langlands 商を ρ と書く. $\varrho = \rho \boxtimes \sigma_0$, $M = M_1 M_0$, $P = MN$, $\bar{P} = M\bar{N}$ とおく. M は V の Witt 分解 $V = U' \oplus V_0 \oplus U$ を保つとする. π は $\mathrm{Ind}_P^G \varrho$ の商であり, 商射 $\mathrm{Ind}_P^G \varrho \to \pi$ は絶対収束する積分

$$f \mapsto f'(g) = \int_{\bar{N}} f(ug)du$$

により与えられる. 従って, 任意の $\eta \in \mathrm{Ind}_P^G \varrho$ と $\eta^\vee \in \mathrm{Ind}_{\bar{P}}^G \varrho^\vee$ に対して,

$$\int_{P\backslash G}\int_{\bar{N}}\langle\eta(uxg),\eta^\vee(x)\rangle dudx = \int_{M\backslash G}\langle\eta(xg),\eta^\vee(x)\rangle dx$$

は π の行列係数である. これをゼータ積分に代入すると,

$$\int_{P\backslash G\times\bar{P}\backslash G}\int_M\langle\varrho(m)\eta(g),\eta^\vee(g')\rangle\int_{\bar{N}}[\Psi_{g,ug'}(s)f^{(s)}](i(m,e))dudmdgdg'$$

となる. 内部の積分は次の三つの射の合成である:

$$I(s)\xrightarrow{\Psi_{g,g'}(s)}\mathrm{Ind}_{P^\square}^{G^\square}I_{M^\square}(s)\xrightarrow{\text{制限}}\mathrm{Ind}_{P\times P}^{G\times G}I_{M^\square}(s)\xrightarrow{\int_{\bar{N}}}\mathrm{Ind}_{P\times\bar{P}}^{G\times G}I_{M^\square}(s).$$

1.5 節の結果より,

$$\begin{aligned}L(s,\sigma) &= L(s,\sigma_0)\prod_{j=1}^k L^{GJ}(s,\sigma_j)L^{GJ}(s,\sigma_j^\vee)\\ &= L(s,\sigma_0)L^{GJ}(s,\rho)L^{GJ}(s,\rho^\vee).\end{aligned}$$

二番目の変形は, Godement-Jacquet の L 因子は Langlands 商と符合することを利用した (Jacquet の論説 [6] を参照). L 因子の積 $L(s,\sigma_0)L^{GJ}(s,\rho)$ は $\Re s>0$ で正則なので, 任意の実部が非負の複素数 s' に対して,

$$\lim_{s=s'}Z(\xi\boxtimes\xi^\vee,f^{(s)})/L^{GJ}\left(s+\tfrac{1}{2},\rho^\vee\right)\neq 0$$

となる $\xi\in\pi$, $\xi^\vee\in\pi^\vee$ と正則切断 $f^{(s)}$ が存在することを証明すればよい.

$M_1^\square$ の逆放物型部分群のべき単根基 N^{U_1} を 1.5 節と同様に定義する. ここまでは ρ を $\mathrm{GL}(U')$ の表現と見做したが, 以下では M_1 を $\mathrm{GL}(U)$ と同一視していることに注意せよ. 群 N^{U_1} は U_2', $U'^\square/U_2'$, U_1, $U^\square/U_1$ に自明に作用することは容易に分かる. $G\times e$ は旗多様体 $P(V^\triangle)\backslash G^\square$ の中で稠密になることが知られている ([15]) ので, $\bar{N}MN\times e$ も $P(V^\triangle)\backslash G^\square$ の中で稠密であるがことが分かる. より強い次の補題が成り立つ.

補題 1.14. $(u,w,m_0,v)\mapsto P(V^\triangle)(u,e)w(m_0v,e)$ は, 位相空間の直積 $\bar{N}\times N^{U_1}\times M_0\times N$ から $P(V^\triangle)\backslash G^\square$ のある開集合への位相同型を与える.

Proof. 単射性を証明するために, $u\in\bar{N}$, $v\in N$, $w\in N^{U_1}$, $m_0\in M_0$ を固定し, $m=(u,e)w(m_0v,e)$ とおき, 部分空間 $V^\triangle m$ から u, v, w, m_0 を一意的に復元できることを証明する. pr_{V_0} と pr_U はそれぞれ Witt 分解 $V=U'\oplus V_0\oplus U$ の第二成分と第三成分への射影を表すとし, pr_1 と pr_2 はそれぞれ直交分解 $V^\square=V_1\oplus V_2$ の第一, 第二成分への射影を表すとする. $t\in V$ に対して, $\triangle(t)=(t,t)$ とおけば,

$$\mathrm{pr}_U\circ\mathrm{pr}_2(\triangle(t)m)=\mathrm{pr}_U(t),\qquad \mathrm{pr}_{V_0}\circ\mathrm{pr}_2(\triangle(t)m)=\mathrm{pr}_{V_0}(t)$$

より次の事実が分かる.

$$\{p\in U^\triangle m\mid \mathrm{pr}_U\circ\mathrm{pr}_2(p)=0,\ \mathrm{pr}_{V_0}\circ\mathrm{pr}_2(p)=0\}=\triangle(U')m.$$

$\alpha_v \in \mathrm{Hom}(U', U)$, $\gamma_v \in \mathrm{Hom}(U', V_0)$, $\mu_w \in \mathrm{End}(U')$ を次式から定める.

$$(x,0,0)v = (x, x\gamma_v, x\alpha_v), \quad \Delta(x)w = ((x,0,0),(x+x\mu_w,0,0)), \quad x \in U'.$$

そうすると,

$$\triangle(Y)m = \{((x, x\gamma_v, x\alpha_v),(x+x\mu_w,0,0)) \mid y \in Y\}$$

であるから, v と w が分かる. 従って, m を mv^{-1} に取り換えて, $v=e$ としてよい. $t=(x,y,0)$ に対して, $\mathrm{pr}_{V_0} \circ \mathrm{pr}_1(\triangle(t)m) = tm_0$ であるから, m_0 も分かる. m を $mw^{-1}m_0^{-1}$ に取り換えて, $m_0 = e$, $w = e$ とすれば, u も容易に復元される. □

$\phi_1 \in \mathscr{S}(N^{U_1})$, $\phi_0 \in \mathscr{S}(M_0)$, $\phi' \in \mathscr{S}(N \times \bar{N})$ に対して, 正則切断 $f^{(s)}$ が次の二条件により定義できる:

- $\mathrm{supp} f^{(s)} \subset P(V^{\triangle})\bar{N}N^{U_1}M_0N$;
- $f^{(s)}(uwm_0v) = \phi'(v,u)\phi_1(w)\phi_0(m_0)$.

$\int_{N\times\bar{N}} \phi'(v,u)dvdu = 1$ になるように選べば,

$$\int_{\bar{N}} [\Psi_{e,u}(s)f^{(s)}](i(m_1m_0,e))du = f^{(s)}_{\phi_2}(m_1)f^{(s)}_{\phi_0}(m_0).$$

任意の $\eta_1 \in \rho$, $\eta_1^\vee \in \rho^\vee$, $\eta_0 \in \sigma_0$, $\eta_0^\vee \in \sigma_0^\vee$ に対して, ξ と $\xi^\vee$ を適当に選べば,

$$Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)}) = Z(\eta_1 \boxtimes \eta_1^\vee, f^{(s)}_{\phi_1})Z(\eta_0 \boxtimes \eta_0^\vee, f^{(s)}_{\phi_0})$$

とできる. 注意 1.6(4) と (1.5) より証明は完了した. □

1.7 局所テータ対応との関係

$(W, \langle\ ,\ \rangle)$ を $2j$ 次元シンプレクティックベクトル空間とする. $\ll\ ,\ \gg = (\ ,\ ) \otimes \langle\ ,\ \rangle$ は, ベクトル空間 $\mathbb{W} = V \otimes_F W$ 上の交代形式を与え, $(G, Sp(W))$ は $Sp(\mathbb{W})$ の dual pair になる. n が奇数のとき, $\widetilde{H}$ を W のメタプレクティック群 $\mathrm{Mp}(W)$, n が偶数のとき, W のシンプレクティック群 $Sp(W)$ とする. $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})$ の Weil 表現 ω_ψ の標準的な分裂 $G \times \widetilde{H} \to \mathrm{Mp}(\mathbb{W})$ に関する引き戻しを $\omega_{\psi,V,j}$ と書く. G の既約許容表現 π に対して, $\omega_{\psi,V,j}[\pi] = \omega_{\psi,V,j}/\bigcap_\phi \ker\phi$ とおく. ここで, ϕ は全ての 0 でない G 同変写像 $\omega_{\psi,V,j} \to \pi$ を渡る. G と $\widetilde{H}$ は可換であるから, $\widetilde{H}$ の滑らか (genuine) 表現 $\Theta_{\psi,V,j}(\pi)$ が存在して, $\omega_{\psi,V,j}[\pi] \simeq \pi \boxtimes \Theta_{\psi,V,j}(\pi)$ となる. 以下では, V と ψ はしばしば省略される. $\Theta_j(\pi)$ は, もし 0 でなければ, 唯一つの既約商 $\theta_j(\pi)$ を持つことが予想されている (局所 Howe 予想). 予想はほとんど全ての場合に証明されている. 剰余標数が 2 でない非アルキメデス体の場合の証明は [19] を参照. F がアルキメデス体の場合の証明は [5] を参照. 対応 $\pi \mapsto \theta_j(\pi)$ はテータ対応と呼ばれる. 一般に $\Theta_j(\pi)$ は長さ有限であることが知られている (cf. [13]).

sgn を直交群の determinant 指標とする.

命題 1.15 ([16, 7, 13]). G の既約許容表現 π に対し, $j(\pi)$ を $\Theta_j(\pi)$ が消えない最小の非負整数 j とするとき以下が成り立つ.

(1) $j(\pi) \leq n$.

(2) $j \geq j(\pi)$ ならば, $\Theta_j(\pi) \neq 0$.

(3) $j(\pi) + j(\pi \otimes \mathrm{sgn}) \geq n$.

注意 1.16. (1) $j \leq \frac{n-1}{2}$ のとき, もし $\Theta_j(\pi) \neq 0$ なら, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1-j$ に対し, $\Theta_k(\pi \otimes \mathrm{sgn}) = 0$ である. 特に, $\Theta_j(\pi)$ と $\Theta_j(\pi \otimes \mathrm{sgn})$ の

(2) $j(\pi) + j(\pi \otimes \mathrm{sgn}) = n$ が成り立つという予想があり, π が尖点的表現の場合などに証明されている ([11, 4] 参照).

Proof. もし, $\Theta_j(\pi) \neq 0$ かつ $\Theta_k(\pi \otimes \mathrm{sgn}) \neq 0$ であれば, 0 でない G 同変写像

$$\omega_{\psi,V,j+k} \simeq \omega_{\psi,V,j} \boxtimes \omega_{\psi,V,k} \to \pi \boxtimes (\pi \otimes \mathrm{sgn}) \simeq \pi \boxtimes (\pi^\vee \otimes \mathrm{sgn}) \to \mathrm{sgn}$$

が存在する. $j(\mathrm{sgn}) = n$ であるから, $j + k \geq n$ でなければならない. □

$s_j = j - \frac{n-1}{2}$ とおく. [8] にある Weil 表現 $\omega_{\psi,V^\square,j}$ の Schrödinger 模型の明示式より, G-同変, H-不変な写像

$$\omega_{\psi,V^\square,j} \to I(s_j), \qquad \Phi \mapsto f_\Phi^{(s_j)}(g) = (\omega_{\psi,V^\square,j}(g)\Phi)(0)$$

が得られる. Rallis の定理より, この写像の像は, H の自明表現 $\mathbb{1}$ の $G^\square$ へのテータリフト $\Theta_{\psi,V^\square,j}(\mathbb{1})$ と同一視できる. 岩澤分解を使って $f_\Phi^{(s)}|_{K^\square} = f_\Phi^{(s_j)}|_{K^\square}$ が成り立つように, $f_\Phi^{(s_j)}$ を $I(s)$ の正則切断 $f_\Phi^{(s)}$ に拡張する.

補題 1.17. *G の既約許容表現 π に対して, 以下の条件は同値:*

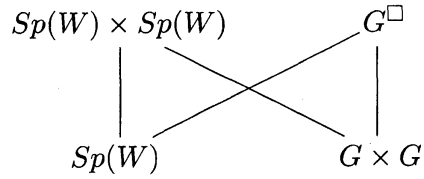
(a) $\Theta_{\psi,V,j}(\pi) \neq 0$;

(b) $\mathrm{Hom}_{G \times G}(\Theta_{\psi,V^\square,j}(\mathbb{1}), \pi^\vee \boxtimes \pi) \neq 0$.

さらにもし $j \geq \frac{n-1}{2}$ ならば次の条件とも同値:

(c) $Z^\dagger(s_j, \pi)$ の $\Theta_{\psi,V^\square,j}(\mathbb{1})$ への制限は恒等的に 0 でない.

Proof. 注意 1.6(5) より (c) ⇒ (b) は明らかである. seesaw 図形



の局所 seesaw 等式より

$$\mathrm{Hom}_{G \times G}(\Theta_{\psi,V^\square,j}(\mathbb{1}), \pi \boxtimes \pi^\vee) \simeq \mathrm{Hom}_{\widetilde{H}}(\Theta_{\psi,V,j}(\pi) \boxtimes \Theta_{\psi^{-1},V,j}(\pi^\vee), \mathbb{1})$$

であるから, (b) ⇒ (a) も自明である.

$a \in F^\times$ に対して, $\psi_a(x) = \psi(ax)$, $aV = (V, a(\ ,\ ))$ とおく. $c_a \in GSp(W)$ が similitude 因子 a を持つとき,

$$\omega_{\psi_a,V} \simeq \omega_{\psi,aV} \simeq \omega_{\psi,V}^{c_a}.$$

$\widetilde{H}$ の任意の既約許容表現 σ に対して, $\sigma^{c^{-1}} \simeq \sigma^\vee$. さらに, $\Theta_{\psi^{-1}}(\pi^\vee) \simeq \Theta_\psi(\pi)^{c^{-1}}$ であり, $\Theta_{\psi^{-1}}(\pi^\vee)$ は既約商を持つから, (a) $\Rightarrow$ (b) も成り立つ.

$$I(s_j)/\Theta_{\psi,V^\square,j}(\mathbb{1}) \simeq \Theta_{\psi,V^\square,n-1-j}(\mathbb{1}) \otimes \mathrm{sgn}$$

であるから, (c) が成り立たなければ,

$$\mathrm{Hom}_{G\times G}(\Theta_{\psi,V^\square,n-1-j}(\mathbb{1}) \otimes \mathrm{sgn}, \pi^\vee \boxtimes \pi) \neq 0$$

より $\Theta_{n-1-j}(\pi \otimes \mathrm{sgn}) \neq 0$. 命題 1.15(3) より $j(\pi) > j$ なので, (a) は不成立. □

2 大域理論

2.1 標準 L 函数の積分表示

本節では, 標準 L 函数の doubling 法による構成を復習する. GL_N の標準 L 函数と異なり, それらには極が存在し, その存在理由はテータリフトの観点から説明される. 以下では, F を代数体, $\mathbb{A}$ をそのアデール, ψ を $\mathbb{A}/F$ の非自明な指標, V を F 上 n 次元の二次形式付きベクトル空間とし, 1.1 節と同じ設定と記号を用いる. 代数群 $G^\square$ のアデールの誘導表現 $I(s) = \mathrm{Ind}_{P(V^\triangle)(\mathbb{A})}^{G^\square(\mathbb{A})} |\det|^s$ にも正則切断や良い切断が定義される. $I(s)$ の正則切断 $f^{(s)}$ に対して, 級数

$$E(f^{(s)})(g) = \sum_{\gamma \in P(V^\triangle)(F)\backslash G^\square(F)} f^{(s)}(\gamma g)$$

は $\Re s > \frac{n-1}{2}$ のとき絶対収束し, $G^\square(\mathbb{A})$ 上の保型形式を与える.

(π, V_π) を $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とする. π の L 函数と ε 函数を

$$L(s,\pi) = \prod_v L(s,\pi_v), \qquad \varepsilon(s,\pi) = \prod_v \varepsilon(s,\pi_v,\psi_v)$$

により定義する. $\varepsilon(s,\pi)$ は実質的に有限積であり, ψ の取り方によらない. $(\pi^\vee, V_{\pi^\vee})$ を π を反傾表現とする. $V_{\pi^\vee} = \overline{V_\pi}$ と取ることができることに注意する. ξ_1, ξ_2 が $G(\mathbb{A})$ 上の尖点形式であるとき, Petersson 内積 $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_G$ を次のように定義する:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_G = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \xi_1(g)\overline{\xi_2(g)}dg.$$

$\xi_1 \in V_\pi$, $\xi_2 \in V_{\pi^\vee}$, $I(s)$ の正則切断 $f^{(s)}$ に対して, 次の積分を考える:

$$Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)}) = \int_{G(F)\times G(F)\backslash G(\mathbb{A})\times G(\mathbb{A})} \xi(g_1)\xi^\vee(g_2)E(f^{(s)})(i(g_1,g_2))dg_1dg_2.$$

この積分を展開すると,

$$Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)}) = \int_{G(\mathbb{A})} \langle \pi(g)\xi, \xi^\vee \rangle_G f^{(s)}((g,e))dg$$

となる (詳しくは, [15] を参照). 同型 $\pi \simeq \otimes_v \pi_v$, $\pi^\vee \simeq \otimes \pi_v$, $I(s) \simeq \otimes_v I_v(s)$ を適当に固定する. 純テンソルからなるデータ $\xi = \otimes_v \xi_v$, $\xi^\vee = \otimes_v \xi_v^\vee$, $f^{(s)} = \otimes_v f_v^{(s)}$ のゼータ積分は, S を悪い素点の集合とすれば, (1.1) と系 1.12 より

$$Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)}) = \frac{L\left(s+\frac{1}{2}, \pi\right)}{b(s)} \prod_{v \in S} Z^\dagger(\xi_v \boxtimes \xi_v^\vee, b_v(s) f_v^{(s)}) \tag{2.1}$$

である. L 函数 $L(s,\pi)$ の解析的性質 (有理型解析接続, 函数等式, 極の有限性および大体の位置) を Eisenstein 級数の解析的性質から知ることができる.

命題 2.1 ([9, 20]). 無限積 $L(s,\pi)$ は右半平面 $\Re s > \frac{n}{2}$ で絶対収束し, 全平面上の有理型函数に解析接続される. さらに, $L(s,\pi)$ は $\left\{1-\frac{n}{2}, 2-\frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{2}\right\} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ に高々一位の極を持ち, 函数等式 $L(s,\pi) = \varepsilon(s,\pi)L(1-s,\pi)$ を満たす.

絶対収束性は π がユニタリ表現であれば成り立つ. 極の正確な解析には, 全ての素点で L 因子と ε 因子を 1.2 節のように定義することが本質的である.

2.2 大域テータ対応

$\mathrm{Mp}(\mathbb{W})_{\mathbb{A}}$ を $Sp(\mathbb{W})$ のアデール群 $Sp(\mathbb{W},\mathbb{A})$ のメタプレクティック被覆とするとき, $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})_{\mathbb{A}}$ の Weil 表現は制限テンソル積 $\omega_\psi = \otimes'_v \omega_{\psi_v}$ で与えられる. (π, V_π) を $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とする. G や $\widetilde{H}$ の局所化を G_v や $\widetilde{H}_v$ と書くことにする. π_v と $\theta_j(\pi_v)$ は殆ど全ての素点で不分岐であり, 制限テンソル積 $\otimes_v \theta_j(\pi_v)$ を考えることができる.

予想 2.2 (大域 Howe 予想). $\otimes_v \theta_{\psi_v}(\pi_v)$ は $\widetilde{H}_{\mathbb{A}}$ の保型表現である.

被覆 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})_{\mathbb{A}} \to Sp(\mathbb{W},\mathbb{A})$ は唯一の分裂 $Sp(\mathbb{W},F) \to \mathrm{Mp}(\mathbb{W})_{\mathbb{A}}$ を持ち, テータ超函数 Θ は ω_ψ から $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})$ の保型形式の空間への $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})_{\mathbb{A}}$ 同変な 射である. 任意の $\phi \in \omega_\psi = \omega_{\psi,V,j}$ と $\xi \in V_\pi$ に対して

$$\theta_\phi(\xi)(h) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \overline{\xi(g)}\Theta(\phi)(g,h)dg$$

は $\widetilde{H}_{\mathbb{A}}$ 上の保型形式になる. $\widetilde{H}_{\mathbb{A}}$ の作用で不変なベクトル空間

$$\theta_j(\pi) = \{\theta_\phi(\xi) \mid \phi \in \omega_{\psi,V,j},\ \xi \in V_\pi\}$$

を保型表現 π の群 $\widetilde{H}$ へのテータリフトと呼ぶ. $\theta_j(\pi)$ は, 0 でないとき, $\otimes_v \theta_j(\pi_v)$ を (少なくとも既約商として) 実現し, 大域 Howe 予想を確かめることができる.

命題 2.3 (Rallis [16]). *(1)* $j \geq n$ ならば, $\theta_j(\pi) \neq 0$.

(2) $\theta_j(\pi) \neq 0$ ならば, 任意の $j' \geq j$ に対して, $\theta_{j'}(\pi) \neq 0$.

(3) j_0 を $\theta_{j_0}(\pi)$ が消えない最小の非負整数であるとき, $\theta_{j_0}(\pi)$ は既約尖点的保型表現である.

素点の有限集合 T に対して, $\mathrm{sgn}_T = \prod_{v \in T} \mathrm{sgn}_v$ は $G(\mathbb{A})$ の指標である. $\#T$ が偶数なら, sgn_T は保型的指標である. $L(s, \pi \otimes \mathrm{sgn}_T) = L(s, \pi)$ は容易に分かる.

2.3 主結果

次の結果は Waldspurger [18] や Rallis [17] の研究の一般化である.

定理 2.4. π を $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現, $\theta_{j-1}(\pi) = 0$ と仮定する. このとき, $\theta_j(\pi) \neq 0$ であるためには, 以下の三条件が成り立つことが必要十分である:

- $j \leq \frac{n}{2} - 1$ のとき, $L(s, \pi)$ は $s = j + 1 - \frac{n}{2}$ で極を持つ;
- $j \geq \frac{n-1}{2}$ のとき, $L(s, \pi)$ は $s = j + 1 - \frac{n}{2}$ で正則かつ零点を持たない;
- 全ての素点 v に関して $\Theta_{\psi_v, V, j}(\pi_v) \neq 0$.

π の指数 $j(\pi)$ を以下のように定義する. $L(s, \pi)$ が極を持つとき,

$$j(\pi) = \min\{j \in \mathbb{Z} \mid L(s, \pi) \text{ has a pole at } s = j + 1 - \tfrac{n}{2}\}.$$

$L(s, \pi)$ が整函数のとき

$$j(\pi) = \min\{j = [\tfrac{n}{2}], [\tfrac{n}{2}]+1, \dots, n \mid L(j + 1 - \tfrac{n}{2}, \pi) \neq 0\}.$$

$j(\pi \otimes \mathrm{sgn}_T) = j(\pi)$ は明らかである. $j(\pi) \leq \frac{n-1}{2}$ ならば, テータリフトが0にならない π の捻りの存在が証明される.

定理 2.5. $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現 π が $j(\pi) \leq \frac{n-1}{2}$ を満たすと仮定する. このとき, $\theta_{j(\pi)}(\pi \otimes \mathrm{sgn}_T) \neq 0$ となる偶数個の素点の集合 T が唯一つ存在する. さらに, $T' \neq T$ かつ $\theta_j(\pi \otimes \mathrm{sgn}_{T'}) \neq 0$ ならば, $j \geq n - j(\pi)$ である.

定理 2.5 は全ての古典群に拡張されている. 詳細は [20] を参照されたい.

2.4 Rallis 内積公式

Schrödinger 模型の取り換えによる同型 $\sigma : \omega_{\psi, V, j} \otimes \overline{\omega_{\psi, V, j}} \to \omega_{\psi, V^\square, j}$ を使って,

$$\Theta(\phi_1)((g, h))\overline{\Theta(\phi_2)((g', h))} = \Theta(\sigma(\phi_1 \otimes \overline{\phi_2}))((g, g', h)) \quad (\phi_1, \phi_2 \in \omega_{\psi, V, j}).$$

領域 $G(F) \times G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A})$ を $[G \times G]$ と略記する. $\theta_{j-1}(\pi) = 0$ と仮定する. 命題 2.3(3) より $\theta_j(\pi)$ は尖点形式からなり, 形式的に

$$\langle \theta_{\phi_1}(\xi_1), \theta_{\phi_2}(\xi_2) \rangle_H = \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \theta_{\phi_1}(\xi_1)(h)\overline{\theta_{\phi_2}(\xi_2)(h)}dh$$

$$= \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \int_{[G \times G]} \xi_1(g_1)\overline{\xi_2(g_2)}\Theta(\phi_1)((g_1, h))\overline{\Theta(\phi_2)((g_2, h))}dg_1 dg_2 dh$$

$$= \int_{[G \times G]} \xi_1(g_1)\overline{\xi_2(g_2)} \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \Theta(\phi_1)((g_1, h))\overline{\Theta(\phi_2)((g_2, h))}dh dg_1 dg_2.$$

Siegel-Weil 公式より

$$\int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \Theta(\phi_1)((g_1,h))\overline{\Theta(\phi_2)((g_2,h))}dh = E\left(f^{(s)}_{\sigma(\phi_1\otimes\overline{\phi_2})}\right)(i(g_1,g_2))|_{s=s_j}$$

であるから, 形式的に以下の等式が知られる:

$$\langle\theta_{\phi_1}(\xi_1),\theta_{\phi_2}(\xi_2)\rangle_H = Z\left(\xi_1\boxtimes\overline{\xi_2}, f^{(s)}_{\sigma(\phi_1\otimes\overline{\phi_2})}\right)|_{s=s_j}. \tag{2.2}$$

以上の議論を正当化するためには, 積分の順序の入れ替えや Siegel-Weil 公式の Eisenstein 級数の収束域の外への拡張をする必要がある. 興味ある読者は, Kudla と Rallis の論文 [10], Wee Teck Gan と武田氏の論文 [3] を参照されたい. 直交群の場合には, Wee Teck Gan と武田氏により任意の j に内積公式 (2.2) が拡張されている (他の群では, ある種の場合には Siegel-Weil 公式の拡張が知られていない場合もある).

2.5 定理 2.4 と 2.5 の証明

最初に $s_j < 0$, 即ち, $j \le \frac{n}{2} - 1$ の場合を考える. $\Phi_v \in \omega_{\psi_v,V^\square,j}$ に対し,

$$F^{(s)}_{\Phi_v} = b_v(s)f^{(s)}_{\Phi_v}, \qquad h^{(s)}_{\Phi_v} = M_v^\dagger(-s)F^{(-s)}_{\Phi_v}$$

とおく. $h^{(s)}_{\Phi_v}$ は $s=-s_j$ で正則であることが確かめられる. $\Phi \in \omega_{\psi,V^\square,j}$ に対しても同様に定義する. $b(s)$ は $s=s_j$ で一位の極を持つので, (2.2) と函数等式より

$$\langle\theta_{\phi_1}(\xi_1),\theta_{\phi_2}(\xi_2)\rangle_H = -\frac{\mathrm{Res}_{s=-s_j} Z\left(\xi_1\boxtimes\overline{\xi_2}, h^{(s)}_{\sigma(\phi_1\otimes\overline{\phi_2})}\right)}{\mathrm{Res}_{s=s_j} b(s)}$$

である. 従って, $\theta_j(\pi)\neq 0$ であるためには $L(s,\pi)$ が $s=j+1-\frac{n}{2}$ で極を持つ必要がある. L 函数の定義より, 有限個のデータ $\{\xi_i,\xi_i^\vee,f_i^{(s)}\}$ が存在して,

$$\mathrm{Res}_{s=n/2-j}L(s,\pi) = \sum_i \mathrm{Res}_{s=-s_j} Z(\xi_i\boxtimes\xi_i^\vee, f_i^{(s)}).$$

適当に正規化された絡作用素 $M_v^*(s)$ は $G_v^\square$ 同変な射

$$M_v^*(-s_j): I_v(-s_j) \to \Theta_{\psi_v,V^\square,j}(\mathbb{1}) \oplus (\Theta_{\psi_v,V^\square,j}(\mathbb{1})\otimes \mathrm{sgn}_v)$$

を実現する. Eisenstein 級数の留数から定まる $I(s_j)$ から $G^\square$ 上の保型形式の空間への $G^\square(\mathbb{A})$ 同変射 $f^{(-s_j)} \to \mathrm{Res}_{s=-s_j}E(f^{(s)})$ は

$$I(-s_j) \to \oplus_T \Theta_{\psi,V^\square,j}(\mathbb{1})\otimes \mathrm{sgn}_T$$

を経由する (T は位数偶数の素点の集合を渡る). 故にゼータ積分の留数も同様の射を経由する. $M^*(-s_j)h_\Phi^{(-s_j)} = f_\Phi^{(s_j)}$ より, 有限個の $\{\xi_{1,i},\xi_{2,i},\phi_{1,i},\phi_{2,i},T_i\}$ が

存在して,

$$\mathrm{Res}_{s=n/2-j}L(s,\pi) = -\frac{\sum_i \mathrm{Res}_{s=-s_j} Z\left(\xi_{1,i} \boxtimes \overline{\xi_{2,i}}, h^{(s)}_{\sigma(\phi_{i,1}\otimes\overline{\phi_{2,i}})} \otimes \mathrm{sgn}_{T_i}\right)}{\mathrm{Res}_{s=s_j} b(s)}$$
$$= \sum_i \langle \theta_{\phi_{1,i}}(\xi_{1,i} \otimes \mathrm{sgn}_{T_i}), \theta_{\phi_{2,i}}(\xi_{2,i} \otimes \mathrm{sgn}_{T_i})\rangle_H.$$

以上より $L(s,\pi)$ が $s=j+1-\frac{n}{2}$ で極を持てば, ある i が存在して, $\theta_j(\pi\otimes\mathrm{sgn}_{T_i}) \neq 0$. $v \notin T_i$ なら $\Theta_j(\pi_v) \neq 0$, $v \in T_i$ なら $\Theta_j(\pi_v \otimes \mathrm{sgn}_v) \neq 0$ であるから, 注意 1.16(1) より, このような集合 T_i は唯一つであり, もし $T' \neq T_i$ かつ $\theta_k(\pi \otimes \mathrm{sgn}_{T'}) \neq 0$ なら $k \geq n-j$ でなければならない. これまでの議論により定理 2.5 は証明された.

$j \geq \frac{n-1}{2}$ の場合を考える. もし $L(s,\pi)$ が $s=j+1-\frac{n}{2}$ で極を持てば, 今までの議論よりある T が存在して, $\theta_{n-1-j}(\pi \otimes \mathrm{sgn}_T) \neq 0$. しかし仮定より $\theta_{j-1}(\pi)=0$ なので, T は空集合ではなく, $\theta_j(\pi)=0$ である. 故に $\theta_j(\pi) \neq 0$ であるためには, $L(s,\pi)$ は $s=j+1-\frac{n}{2}$ で正則でなければならない. $\xi_1 = \otimes_v \xi_{1,v}$, $\overline{\xi_2} = \otimes_v \overline{\xi_{2,v}}$, $\phi_1 = \otimes_v \phi_{1,v}$, $\overline{\phi_2} = \otimes_v \overline{\phi_{2,v}}$ のとき,

$$\langle \theta_{\phi_1}(\xi_1), \theta_{\phi_2}(\xi_2)\rangle_H = \frac{L\left(j+1-\frac{n}{2},\pi\right)}{b(s_j)} \prod_{v \in S} Z^\dagger\left(\xi_{1,v} \boxtimes \overline{\xi_{2,v}}, F^{(s_j)}_{\sigma_v(\phi_{1,v}\otimes\overline{\phi_{2,v}})}\right).$$

補題 1.17 より定理 2.4 が従う.

References

[1] J. Adams, L-functoriality for dual pairs, Astérisque **171-172** (1989) 85–129.

[2] R. Godement and H. Jacquet, Zeta functions of simple algebras, Springer Lec. notes in Math., vol. **260**, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[3] W. T. Gan and S. Takeda, The regularized Siegel-Weil formula: the second term identity and non-vanishing of theta lifts from orthogonal groups, J. Reine Angew. Math. (to appear)

[4] M. Harris, S. Kudla and W. J. Sweet Jr., Theta dichotomy for unitary groups, J. Am. Math. Soc., **9** (1996) 941–1004.

[5] R. Howe, Transcending classical invariant theory, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 535–552.

[6] H. Jacquet, Principal L-functions of the linear group, Automorphic forms, Representations, and L-functions, Proc. Symp. Pure Math., vol. **33**, part II, Am. Math. Soc., (1979) 63–86.

[7] S. Kudla, On the local theta-correspondence, Invent. math. **83** (1986) 229–255.

[8] S. Kudla, Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs, Israel. J. Math. **84** (1994) 361–401.

[9] S. Kudla and S. Rallis, Poles of Eisenstein series and L-functions, Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part II, 81–110, Israel Math. Conf. Proc. **3**, Weizmann, Jerusalem, 1990.

[10] S. Kudla and S. Rallis, A regularized Siegel-Weil formula: the first term identity, Ann. Math. **140** (1994) 1–80.

[11] S. Kudla and S. Rallis, On first occurrence in local theta correspondence, Automorphic representations, L-functions and applications: progress and prospects Berlin: de Gruyter (2005) 273–308.

[12] E. Lapid and S. Rallis, On the local factors of representations of classical groups, Automorphic representations, L-functions and applications: progress and prospects, Berlin: de Gruyter (2005) 309–359.

[13] C. Moeglin, M.-F. Vignera and C.-L. Waldspurger, Correspondence de Howe sur un corps p-adique, Springer Lec. notes in Math. **1291**, 1987.

[14] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, ε factor of representations of classical groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **83** (1986) 4589-4593.

[15] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, L-functions for classical groups, in Springer Lec. notes in Math., vol. **1254** (1987) 1–52.

[16] S. Rallis, On the Howe duality conjecture, Compos. Math. **51** (1984) 333–399.

[17] S. Rallis, L-functions and the oscillator representation, Springer Lec. notes in Math., vol. **1245**, 1987.

[18] J.-L. Waldspurger, *Correspondance de Shimura*, J. Math. Pures Appl. (9) **59** (1980) 1–132.

[19] J.-L. Waldspurger, Démonstration d'une conjecture de dualité de Howe dans le cas p-adique, $p \neq 2$, Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Pt. I: Papers in representation theory, Pap. Workshop L-Functions, Number Theory, Harmonic Anal., Tel-Aviv/Isr. 1989, Isr. Math. Conf. Proc. 2, 267–324, Weizmann, Jerusalem 1990.

[20] S. Yamana, L-functions and theta correspondence for classical groups, (preprint)

Graduate School of Mathematics, Kyushu University, 744, Motooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, Japan
e-mail:yamana@math.kyushu-u.ac.jp